

ADAM JONKISZ



ZAGADNIENIA LOGIKI FORMALNEJ I OGÓLNEJ TEORII MNOGOŚCI

WYDAWNICTWO NAUKOWE
UNIwersytetu Ignatianum w Krakowie

KRAKÓW 2024

Mojej Kochanej Żonie Ilonie

SPIS TREŚCI

Uwagi wstępne	11
Podziękowania	14
Rozdział I: Klasyczny rachunek zdań (KRZ)	17
1. Język KRZ	17
1.1 Charakterystyka syntaktyczna	18
1.1.1 Słownik KRZ	18
1.1.2 Składnia i wyrażenia/formuły KRZ	19
1.2 Własności semantyczne spójników prawdziwościowych	23
1.2.1 Pojęcie funkcji prawdziwościowej i wartościowania	23
1.2.2 Matrycowe definicje spójników prawdziwościowych ...	25
1.2.3 Związki definicyjne między funktorami prawdziwościami	29
2. Tautologie/prawa KRZ	43
2.1 Sprawdzanie tautologiczności	43
2.2 Wybrane tautologie/prawa KRZ	45
3. Założeniowy system KRZ	47
3.1 Reguły pierwotne systemu	47
3.2 Tezy i reguły wtórne	51
3.2.1 Pojęcie reguły wtórnej	52
3.2.2 Wybrane tezy/reguły wtórne	52
4. Aksjomatyczne systemy KRZ	78
4.1 Uwagi ogólne	78
4.2 System Hilberta i Bernaysa	79
4.3 System Łukasiewicza	83

Rozdział II: Nieklasyczne rachunki zdań	87
1. Logika wielowartościowa	89
2. Logika modalna	94
3. Logika deontyczna	98
4. Logika intuicjonistyczna i logiki pośrednie	103
Rozdział III: Rachunek predykatów	109
1. Uwagi ogólne	109
2. Klasyczny rachunek predykatów	114
2.1 Węższy rachunek predykatów (WRP)	114
2.1.1 Słownik, składnia i formuły WRP	114
2.1.2 Założeniowy system WRP	118
2.1.2.1 Reguły i definicje wyjściowe	119
2.1.2.2 Tezy WRP	123
2.2 WRP z identycznością	135
3. Teoria wynikania zdań kategorycznych	142
3.1 Podstawowe prawa wynikania	143
3.2 Sprawdzanie poprawności logicznej wnioskowań ze zdaniami kategorycznymi	150
3.2.1 Tradycyjne metody sylogistyki	151
3.2.1.1 Niezawodne tryby wnioskowania	151
3.2.1.2 Dyrektywy (warunki) dla przesłanek i wniosku	153
3.2.2 Udoskonalona metoda Venna	157
3.3 Interpretacja zdań kategorycznych w WRP	165
Rozdział IV: Ogólna teoria mnogości	171
1. Rachunek zbiorów	171
1.1 Podstawowe pojęcia rachunku zbiorów	172
1.2 Relacje zakresowe między zbiorami	174
1.3 Działania na zbiorach	182
1.4 Zbiory wyznaczone przez funkcje zdaniowe	190
1.5 Rachunek zbiorów a teoria wynikania zdań kategorycznych	193
2. Teoria relacji	196
2.1 Iloczyn kartezjański zbiorów	196
2.2 Relacje i działania na relacjach	199
2.3 Rodzaje relacji	207
2.3.1 Funkcje i ciągi	208

2.3.2 Relacje zwrotne, spójne, symetryczne, asymetryczne, przechodnie	216
2.3.3 Relacje równościowe	217
2.3.4 Relacje porządkujące i zbiory uporządkowane	220
2.3.5 Izomorfizm relacji	225
3. Teoria liczb kardynalnych	229
3.1 Równoliczność zbiorów, pojęcia mocy zbioru i liczby kardynalnej	229
3.2 Rodzaje zbiorów ze względu na liczność	235
3.2.1 Zbiory skończone i nieskończone	235
3.2.2 Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne	238
3.3 Relacje w zbiorze liczb kardynalnych	249
3.3.1 Równości (działania na liczbach kardynalnych)	249
3.3.2 Nierówności	261
4. Antynomie teorii mnogości	268
4.1 Antynomie klasycznej teorii zbiorów	271
4.2 Usuwanie antynomii	271
4.2.1 Teoria typów logicznych	271
4.2.2 Aksjomatyzacja teorii mnogości	272
Zakończenie	279
Bibliografia	285
Definicje, twierdzenia, schematy	291
Indeks pojęć i nazwisk	323

UWAGI WSTĘPNE

Książka ta jest drugą spośród trzech składających się na opracowanie wybranych zagadnień z logiki. Sformułowane tu uwagi są ograniczone do dotyczących niniejszej książki, choć niektóre są zwięzłym przypomnieniem uwag ogólnych¹.

1. Zagadnienia podjęte w rozważaniach są wybrane z logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości. Podział na te dwa źródła zagadnień jest wskazany już w tytule książki i widoczny w jej strukturze, choć jest uzasadnione, względami nie tylko historycznymi i praktycznymi, by co najmniej pewne wyniki teorii mnogości – na przykład rachunek zbiorów i relacji, teorię liczb kardynalnych – włączyć do logiki formalnej. W tak rozumianej logice formalnej są nie tylko zawsze w niej umieszczane rachunki logiczne – rachunki zdań klasyczne i nieklasyczne oraz rachunki predykatów – lecz także zagadnienia tzw. ogólnej teorii mnogości i uzyskane w tym zakresie wyniki. Choć w rozumianej szerzej logice formalnej mieszczą się także wszystkie zagadnienia podjęte w tej książce, to jest w niej zastosowany wskazany tytułem podział, zgodny z przyjętym w publikacjach oddzieleniem logiki formalnej (rozumianej wąsko) od teorii mnogości².

¹ Odsyłając do obszernych uwag dotyczących całego opracowania, sformułowanych w: A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, Kraków 2023, warto tu powtórzyć, że jego rdzeniem był podręcznik logiki napisany z myślą o studiujących i uprawiających filozofię.

² Na oddzielanie teorii mnogości od logiki wskazują często tytuły opracowań, np.: J. Śłupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, Warszawa 1963; J. Śłupecki, K. Hałkowska, K. Piróg-Rzepecka, *Logika i teoria mnogości*, Warszawa 1978; L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, Lublin 1991.

1.1 W zakresie logiki formalnej są uwzględnione rachunki zdań i rachunki predykatów. Najobszerniej jest omawiany klasyczny rachunek zdań (KRZ), w książce są bowiem uwzględnione różne metody budowania systemów KRZ, a zwłaszcza stosowana w niniejszym ujęciu metoda założeniowa; spośród rachunków zdań nieklasycznych zostały wybrane rachunki logiki wielowartościowej, modalnej (rozumianej wąsko), deontycznej oraz logika intuicjonistyczna i tzw. logiki pośrednie.

Również charakterystyka rachunków predykatów jest skupiona na rachunkach klasycznych – ponownie z naciskiem na system założeniowy. Teoria wynikania zdań kategorycznych jest najpierw omówiona odrębnie, w sposób przyjęty w sylogistyce, uzupełniony o nowsze metody, po czym teoria ta jest zinterpretowana w rachunku predykatów.

1.2 W rozdziale poświęconym teorii mnogości są omówione zagadnienia zwykle umieszczane w jej części zwanej ogólną: podstawowe pojęcia rachunku zbiorów (relacje między zbiorami, działania na zbiorach, zbiory wyznaczone przez funkcje zdaniowe) i zagadnienia z tym rachunkiem związane (rachunek zbiorów a teoria zdań kategorycznych); podstawowe wyniki teorii relacji (rodzaje relacji, relacje porządkujące zbiory, izomorfizm relacji); wybrane zagadnienia teorii liczb kardynalnych (pojęcie liczby kardynalnej, rodzaje zbiorów ze względu na liczność – a zwłaszcza kategorie zbiorów nieskończonych – arytmetyka liczb kardynalnych)³; ponadto są w tym rozdziale uwzględnione zagadnienia związane z antynomiami tzw. klasycznej teorii mnogości oraz ze sposobami ich usuwania.

1.3 Tytułem usprawiedliwienia powtórzę tu sformułowaną już uwagę dotyczącą każdego szerszego opracowania wyników logiki, a więc także mojego, którego częścią jest niniejsza książka. Otóż w zakresie praw i uznanych metod logiki trudno o jakieś nowe ujęcie, zwłaszcza gdy zamiarem źródłowym, przejawiającym się i w tej książce, było podręcznikowe opracowanie wybranych zagadnień z logiki adresowane do filozofów. Oryginalności można się doszukiwać jedynie w doborze i układzie zagadnień, sposobie ich prezentacji i uzupełniających główne rozważania przykładach i uwagach. Dlatego wyniki prezentowane w niniejszej książce, poświęconej zagadnieniom logiki formalnej i ogólnej teorii mnogości,

³ Zagadnienia te są umieszczone w ogólnej teorii mnogości m.in. w L. Borkowski, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt.

sformułowane w niej definicje, twierdzenia i dowody są, co nieuniknione, wzorowane na znanych opracowaniach, tj. zgodne pod względem wyników i zbliżone w sposobie ich przedstawienia⁴. Nie są jednak ich kompilacją, ponieważ różnią się nie tylko układem definicji i twierdzeń, lecz także ich sformułowaniami zapisanymi w jednolitej notacji (symbolice), komentarzami i przykładami, a często także sposobem uzasadniania twierdzeń (sposobem dowodzenia). Są także w książce merytorycznie nowe propozycje, jak algorytmiczna metoda, uzupełniająca znaną metodę wyszukiwania zależności definicyjnych między funktorami prawdziwościowymi; uproszczone metody sprawdzania poprawności logicznej wnioskowań ze zdaniem kategorycznymi.

W opracowaniach wyników logiki formalnej mniej jest także miejsca na odnoszenie się do innych prezentacji tych wyników, zwłaszcza krytyczne – dlatego odesłania do innych prac są nieliczne i zwykle nie są komentujące.

2. Zamieszczane w tekście odsyłacze do wyników przedstawionych w innych miejscach całego opracowania zagadnień z logiki wskazują najpierw – znakami *, ** i *** – na główne jego części, a następnie cyframi rzymskimi na rozdział danej części, po czym – cyframi arabskimi – na podrozdziały i ich paragrafy⁵.

2.1 Definicje (**D**), twierdzenia (**T**) i wnioski (**W**) – także aksjomaty (**A**), twierdzenia pomocnicze (**L**), metatezy (**MT**) – są numerowane odrębnie w każdym podrozdziale, zwykle kolejnymi liczbami (**D1**, **D2**, **D3**; ..., **T1**, **T2**, ...), są jednak także dodatkowe wskaźniki, np. **D1.1**, **D1.2**; **D6.a**,

⁴ Przyjęty w niniejszej książce dobór i układ zagadnień, a także sposób rozwijania rachunków logicznych jest wzorowany na opracowaniu L. Borkowskiego, *Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości*, dz. cyt. W wielu fragmentach korzystałem także z: A. Grzegorzcyk, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1981; T. Batóg, *Podstawy logiki*, Poznań 2003; K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości. Wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości*, Warszawa 1978.

⁵ Zgodnie z tą umową symbolem * jest oznaczana pierwsza część całego opracowania, czyli: A. Jonkisz, *Zagadnienia semiotyki logicznej i ogólnej metodologii nauk*, dz. cyt.; znak ** będzie używany w odesłaniach do wyników zawartych w niniejszej książce, a *** w odsyłaczach informuje, że bieżące analizy są rozwinięte i uściśnione w części trzeciej, pt. *Zagadnienia syntaktyki i semantyki systemów dedukcyjnych* (w druku). Wyniki i ustalenia wskazywane w odesłaniach do innych części całego opracowania nie są niezbędne w lekturze niniejszej książki.

D6.b; T35.a, T35.b, T35.c; D6.a1, D6.a2; A1_{HB}, A2_{HB}, A3_{HB}; T1_{HB}, T2_{HB} – stosowane, gdy oznaczone w ten sposób wyniki są powiązane, jak na przykład definicje tego samego lub zbliżonych pojęć, grupa pokrewnych twierdzeń lub wniosków, aksjomaty lub tezy jednego systemu. Częściej stosowane (nie tylko w tym opracowaniu) definicje i twierdzenia oraz reguły wnioskowania (dołączania nowych wierszy do dowodu) będą oprócz oznaczeń wskazujących na ich miejsce w rozważaniach oznaczane także skrótami, które łatwiej jest skojarzyć z treścią definicji lub twierdzenia, np. **RO** wskazuje na regułę odrywania, **O $\wedge$** na regułę opuszczania kwantyfikatora dużego, **df $\subset$** na definicję relacji zawierania się zbiorów.

2.2 Odesłania, w dowodach lub uwagach, do oznaczanych symbolicznie wyników (definicji, twierdzeń, lematów, wniosków itp.) są zorganizowane następująco:

(i) wyniki, dla których wprowadzono symbol niezależny od ich miejsca w rozważaniach, są oznaczane danym symbolem (np. **df $\subset$**);

(ii) pozostałe wyniki:

– gdy wskazywany wynik został osiągnięty w bieżącym podrozdziale, jest oznaczany tylko swoim symbolem, np. **D3** to trzecia definicja, a **T2.1** to twierdzenie 2.1 aktualnego podrozdziału;

– gdy wynik pochodzi z innego podrozdziału, wtedy jego oznaczenie symboliczne jest poprzedzone skrótem (zapisanym drukiem zwykłym) wskazującym odpowiedni fragment opracowania, np. *RI.3: **D1.a** to definicja **1.a** w trzecim podrozdziale rozdziału pierwszego części pierwszej całego opracowania); **RIII.2: **T15** to piętnaste twierdzenie drugiego podrozdziału trzeciego rozdziału części drugiej (czyli niniejszej książki) itp. Takie same skróty wskazujące na miejsce w rozważaniach są również stosowane do wyników nienumerowanych;

(iii) znak ■ wskazuje, o ile to potrzebne, na zakończenie dowodu.

Podziękowania

Pragnę podziękować wszystkim osobom, które pomogły w opublikowaniu tej książki. Przede wszystkim Recenzentom za trafne uwagi. Uwzględniając je, usunąłem błędy dostrzeżone w tekście przesłanym do oceny, poprawiłem wiele sformułowań, a także uzupełniłem wcześniejszą wersję książki o nowe wyniki lub zagadnienia (m.in. logika

intuicjonistyczna, logiki pośrednie, antynomie teorii mnogości, informacji historyczne).

Książka ta nie mogłaby się ukazać bez wsparcia osób, które zdecydowały o przyznaniu środków na moje badania realizowane w Akademii Ignatianum w Krakowie (obecnie Uniwersytet Ignatianum) oraz bez pomocy pracowników Wydawnictwa, dzięki którym wyniki tych badań zostały opublikowane w niniejszej postaci.

Szczególnie podziękowania i wyrazy wdzięczności kieruję do dr Jolanty Koszteyn za pomoc w korekcie i formatowaniu wersji tekstu przekazanych do recenzji oraz do opracowania wydawniczego.